SISTEMI LINEARI

Un **sistema di equazioni lineari** (o brevemente un **sistema lineare**) di *m* equazioni in *n* incognite, si presenta nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Le incognite sono $x_1, x_2, \dots, x_n$ e i termini noti sono $b_{1,}b_2, \dots, b_m$.

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite può appartenere ad una ed una sola delle seguenti categorie:

sistema possibile : questo a sua volta presenta due possibilità: una sola soluzione costituita da una n–pla di valori o infinite soluzioni dipendenti ciascuna da uno o più parametri, soluzioni che si possono determinare dando opportuni valori ai parametri.

sistema impossibile: non esistono soluzioni comuni alle varie equazioni.

Ci proponiamo, oltre che di imparare a risolvere un sistema lineare, anche di imparare a discuterlo, cioè a scoprire a priori (quindi senza doverlo risolvere), se è risolubile o no, e quante sono le sue soluzioni.

Al biennio avete imparato a risolvere semplici sistemi lineari con vari metodi, che si basano tutti sull'idea di fondo che è quella di trovare un sistema che abbia le stesse soluzioni di quello dato ma sia scritto in una forma più semplice.

DEFINIZIONE. **Due sistemi lineari di m equazioni in n incognite si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni, cioè se ogni n–pla che è soluzione dell'uno lo è anche dell'altro.**

Ad esempio i sistemi $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x = 7 \\ y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

sono equivalenti, come si verifica facilmente.

Un'ottima tecnica per risolvere un sistema lineare è quella di trovare un sistema equivalente a quello dato ma con una struttura più semplice. Per farlo vediamo prima come un sistema può essere scritto in forma matriciale.

Il sistema di *m* equazioni in *n* incognite scritto sopra corrisponde a: $A\underline{x} = \underline{b}$, dove *A* è la matrice dei coefficienti, $\underline{x}$ è la matrice delle incognite (o vettore colonna), $\underline{b}$ è la matrice dei termini noti.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

E' anche importante la matrice C, detta matrice completa, costruita a partire dalla A accostandole a destra la colonna dei termini noti: possiamo anche scrivere C = [A|B].

Se $\underline{b} = \underline{0}$ allora il sistema si dice **omogeneo**.

In generale il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ si dice sistema omogeneo associato al sistema $A\underline{x} = \underline{b}$.

1. I SISTEMI DI CRAMER

Prima di affrontare la risoluzione di un sistema lineare qualunque, ci soffermiamo su un caso particolare notevole, quello di un sistema di n equazioni in n incognite, la cui matrice A è invertibile. Si chiama **sistema di Cramer.**

$A\underline{x} = \underline{b}$, con A matrice $n \times n$, $detA \neq 0$

Poiché il $detA \neq 0$, esiste la matrice inversa A^{-1}. Moltiplichiamo a sinistra entrambi i membri dell'equazione per A^{-1} e otteniamo:

$$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Applico la proprietà associativa della moltiplicazione tra matrici ed eseguo il prodotto $A^{-1} \cdot A$. Il prodotto di una matrice per la sua inversa dà la matrice identica, quindi: $I \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$.

Quindi si trova l'unica soluzione $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ del sistema lineare assegnato.

Nel caso ad esempio di un sistema di tre equazioni in tre incognite, effettuando esplicitamente il prodotto di

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ per $\underline{b}$ si ottiene, ad esempio per x_1 la seguente espressione:

$$x_1 = \frac{1}{detA}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3)$$

che non è altro che il prodotto di $\frac{1}{detA}$ per il determinante della matrice $\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ottenuta dalla matrice A sostituendo la prima colonna con i termini noti.

Si riconosce in questo modo di procedere la ben nota regola di Cramer che avete visto al biennio.

Regola di Cramer**: Un sistema di *n* equazioni in *n* incognite $A\underline{x} = \underline{b}$ la cui matrice dei coefficienti abbia determinante diverso da zero ha come unica soluzione la *n*-upla di numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_n$ data dalle seguenti formule**

$\boldsymbol{x_1 = \frac{detA_1}{detA}} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{detA_2}{detA}} \quad \boldsymbol{x_3 = \frac{detA_3}{detA}}$ **...........** $\boldsymbol{x_n = \frac{detA_n}{detA}}$

essendo $A_1, A_2, \dots, A_n$ le matrici ottenute da A sostituendo rispettivamente la prima, la seconda, la terza colonna, ecc. con il vettore $\underline{b}$ dei termini noti.

Esempio:

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad detA = -7$ $\qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Scriviamo la matrice inversa: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

Applichiamo ora la regola di Cramer su esposta, come al biennio:

$$x_1 = \frac{det\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}}{-7} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{det\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}}{-7} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

2. TRASFORMAZIONI LINEARI

Definizione: **Una funzione $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ si dice lineare se è additiva e omogenea, ovvero se gode delle seguenti proprietà:**
$\boldsymbol{f\left(\underline{x}+\underline{y}\right) = f(\underline{x}) + f\left(\underline{y}\right)}$ $\quad \forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (proprietà di additività)
$\boldsymbol{f(k\underline{x}) = k \cdot f(\underline{x})}$ $\quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}, \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (proprietà di omogeneità)

Le due proprietà sopra scritte si possono compendiare nell'unica condizione:
$\boldsymbol{f\left(k_1\underline{x} + k_2\underline{y}\right) = k_1 f(\underline{x}) + k_2 f\left(\underline{y}\right)}$ $\quad \forall \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2} \in \mathbb{R}, \forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Inoltre se *f* è lineare, $f(\underline{0}) = \underline{0}$

Teorema di rappresentazione delle funzioni lineari: **Una funzione $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ è lineare se e solo se $\boldsymbol{f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}}$, dove A è una matrice di *m* righe per *n* colonne.**

3. CASO GENERALE DI SISTEMA LINEARE

Torniamo a considerare in generale il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, essendo A una matrice di m righe per n colonne qualunque, e sia $A\underline{x} = \underline{0}$ il sistema omogeneo associato.

Se $\underline{x_0}$ è una soluzione del sistema di partenza, e $\underline{x}$ è un'altra sua soluzione, è subito visto che $\underline{x} - \underline{x_0}$ è soluzione del sistema omogeneo associato. Infatti:

$A\underline{x} = \underline{b}$ e $A\underline{x_0} = \underline{b}$ allora $A(\underline{x} - \underline{x_0}) = \underline{0}$.

Allo stesso modo si vede che se $\underline{y}$ è una soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$, allora $\underline{x_0} + \underline{y}$ è soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$.

Possiamo allora enunciare la seguente proposizione:

Proposizione: **le soluzioni di un sistema lineare si ottengono tutte sommando una sua soluzione particolare con la soluzione generale di un sistema omogeneo associato.**

Per risolvere un sistema occorre dunque affrontare una duplice questione:

1. Vedere se esiste una soluzione particolare $\underline{x_0}$ del sistema stesso (in caso contrario il sistema non ammette alcuna soluzione)
2. Dare un procedimento per trovare una soluzione generale del sistema omogeneo associato.

Esaminiamo la prima questione: la condizione affinché esista una soluzione $\underline{x_0}$ del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, tale cioè che $A\underline{x_0} = \underline{b}$, è che il vettore $\underline{b}$ appartenga all'immagine della trasformazione lineare *f* rappresentata dal sistema. In pratica il vettore $\underline{b}$ deve poter essere scritto come combinazione lineare delle colonne di A.
Ciò equivale a dire che le due matrici completa (*C*) e incompleta (*A*) del sistema:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

abbiano lo stesso rango.

Teorema di Rouché-Capelli: **Un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni se e soltanto se la matrice incompleta *A* e la matrice completa *C* hanno lo stesso rango.**

Per esaminare la seconda questione non daremo un procedimento generale, ma useremo degli esempi.

Dato un sistema lineare, procederemo alla sua risoluzione in quattro passi:

passo 0: scrittura matriciale

passo 1: applicazione del Teorema di Rouchè Capelli (per stabilire s il sistema è possibile oppure no)

passo 2: predisposizione del sistema all'utilizzo della regola di Cramer

passo 3: applicazione della regola di Cramer

ESEMPIO 1. Sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Passo 0: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Passo 1: trovo il rango di A e il rango di C.

Calcolo $detA = 0$. Allora il rango di A non è 3. Vedo che al suo interno c'è il minore $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ che ha determinante -2, pertanto il rango di A è 2.

Considero ora la matrice completa C: al suo interno c'è lo stesso minore di prima, quindi $r(C) \geq 2$.

Orlo il minore $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ con la quarta colonna e l'ultima riga e ottengo la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ che ha determinante 2. Pertanto il rango di C è 3.

Per il Teorema di Rouché Capelli il sistema è impossibile.

ESEMPIO 2.

Sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=0 \\ 3x+y+4z=2 \end{cases}$$

Passo 0: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Passo 1: $r(A)=2$ (visto prima).

$r(C)\geq 2$ perché $det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=-2\neq 0$

Orlo la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ utilizzando l'ultima colonna e l'ultima riga ottenendo la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, il cui determinante è 0. Orlo la matrice utilizzando la terza colonna, e ottengo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ il cui determinante è di nuovo 0. Pertanto $r(C)=2$.

Per il Teorema di Rouché Capelli il sistema è possibile.

Passo 2. Predispongo il sistema all'utilizzo della regola di Cramer.

Scrivo il sistema formato solo dalle prime due equazioni (perché faccio riferimento al minore non singolare $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$), e porto al secondo membro di ogni equazione i termini con l'incognita *z*:

$$\begin{cases} x+y=1-z \\ x-y=-2z \end{cases}$$

Passo 3: Utilizzo la regola di Cramer

$$x=\frac{\det(A_1)}{detA}=\frac{det\begin{bmatrix} 1-z & 1 \\ -2z & -1 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}=\frac{-1+z+2z}{-2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z$$

$$y=\frac{\det(A_2)}{detA}=\frac{det\begin{bmatrix} 1 & 1-z \\ -1 & -2z \end{bmatrix}}{-2}=\frac{-2z+1-z}{-2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z$$

Al variare di *z* le infinite soluzioni del sistema sono le terne $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z;\ -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z;z\right)$

Il che equivale a dire che una soluzione particolare del sistema è ad esempio la terna $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ ottenuta ponendo $z=0$, e una soluzione generale del sistema omogeneo associato è $\left(-\frac{3}{2}z;\ \frac{3}{2}z;z\right)$.

Poiché le soluzioni del sistema si ottengono in funzione del valore di un parametro, in questo caso *z*, si dice che il sistema ha ∞^1 soluzioni.

ESEMPIO 3.

Sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x-y+w+1=0 \\ y-2z+w=0 \\ 6x-3y+2z+w+2=0 \end{cases}$$

Passo 0.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Passo 1.

Calcolo il rango A. Intanto individuo un minore di ordine 2 non singolare: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ il cui determinante è 3. Quindi $r(A) \geq 2$.

Quindi orlo il minore con la terza colonna e ottengo $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ il cui determinante è 0.

Allora orlo il minore con la quarta colonna e ottengo $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ il cui determinante è 0.

Allora $r(A) = 2$.

Per calcolare il rango di C posso orlare il minore di ordine 2 con la quinta colonna e ottengo $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ il cui determinante è 0. Quindi, non avendo altre possibilità di orlatura, si conclude che $r(C) = 2$.

Per il teorema di Rouché Capelli il sistema è possibile.

Passo 3. Predispongo il sistema all'utilizzo della regola di Cramer.

$$\begin{cases} 3x - y + w + 1 = 0 \\ y - 2z + w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = -w - 1 \\ y = 2z - w \end{cases}$$

Passo 4. Risolvo il sistema con la regola di Cramer.

$$x = \frac{det(A_1)}{detA} = \frac{det \begin{bmatrix} -w-1 & -1 \\ 2z-w & 1 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-w - 1 + 2z - w}{3} = \frac{2z - 1 - 2w}{3} = \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}w - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{detA} = \frac{det \begin{bmatrix} 3 & -w-1 \\ 0 & 2z-w \end{bmatrix}}{3} = \frac{6z - 3w}{3} = 2z - w$$

Le soluzioni del sistema sono le quaterne ordinate $\left(\frac{2}{3}z - \frac{2}{3}w - \frac{1}{3}; 2z - w;\ z;\ w\right)$.

Poiché le soluzioni si trovano al variare di due parametri, si dice che il sistema ha ∞^2 soluzioni.

4. METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

Equivalenza di matrici.

Si chiamano operazioni elementari sulle righe (rispettivamente sulle colonne) di una matrice le seguenti operazioni

i) scambio di due righe (colonne);
ii) moltiplicazione di una riga (colonna) per una costante $k \neq 0$
iii) sostituzione di una riga (colonna) con la somma della riga (colonna) stessa con un'altra moltiplicata per una costante k.

Due matrici A e B si dicono **equivalenti per righe** (rispettivamente **per colonne**) se B si ottiene da A eseguendo un numero finito di operazioni elementari sulle righe (colonne).

Scriveremo che A ~ B. È facile dimostrare che se A ~ B allora B ~ A e che se A ~ B e B ~ C allora A ~ C, cioè che la relazione ~ è una relazione di equivalenza. Ed è importante il

Teorema**. Se le matrici complete di due sistemi lineari sono equivalenti per righe allora i sistemi sono equivalenti, cioè hanno le stesse soluzioni**

Vediamo ora, su un esempio, come si possa utilizzare il precedente teorema per la risoluzione di un sistema lineare.

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ 2x+y+z+3t=2 \\ x-y-z=0 \\ x+y+z-3t=-1 \end{cases}$$

La matrice completa è: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

Se sommiamo alla II riga di C la prima moltiplicata per -2, alla II la I moltiplicata per -1 ed alla IV la I moltiplicata per -1 otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ora se in questa nuova matrice sommiamo alla III riga la seconda moltiplicata per -2 troviamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Infine se sommiamo alla IV riga la II moltiplicata per $-\frac{2}{9}$ risulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{9} \end{bmatrix}$$

Quest'ultima matrice ottenuta mediante operazioni elementari sulla matrice C è ad essa equivalente, e quindi in virtù del teorema sopra esposto il sistema di partenza è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ -y - z + 5t = 0 \\ -9t = -1 \\ 0 = -16/9 \end{cases}$$

che è palesemente impossibile.

In questo esempio abbiamo "ridotto" la matrice A ad una matrice equivalente "più semplice" nel senso precisato dalla seguente definizione.

Definizione. **Una matrice A di tipo $m \times n$ di elemento generico a_{ij} si dice ridotta (per righe) se in ogni riga che non contiene solo zeri esiste un elemento $a_{ij} \neq 0$ tale che per ogni k con $i < k \leq m$ si ha $a_{kj} = 0$.**

Il procedimento illustrato è sempre possibile in quanto sussiste il seguente teorema:

Teorema. **Sia A una matrice qualsiasi, allora esiste una matrice B ridotta per righe equivalente alla A.**

Presentiamo a questo punto **il metodo di eliminazione di Gauss**, che si basa sul seguente teorema:

Teorema (di Gauss). **Se un sistema lineare è ottenuto da un altro con una delle seguenti operazioni:**

i) scambio di due equazioni
ii) moltiplicazione di ambo i membri di un'equazione per una costante non nulla
iii) un'equazione è sostituita dalla somma di sé stessa con un multiplo di un'altra

allora i due sistemi hanno le stesse soluzioni.

Lo illustriamo mediante alcuni esempi.

ESEMPIO 1.

Sia dato il seguente sistema: $\begin{cases} 3x_3 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

Possiamo effettuare le seguenti operazioni:

i) scambiamo la prima riga con la terza:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

ii) moltiplichiamo la prima riga per 3:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

iii) aggiungiamo la prima riga moltiplicata per -1 alla seconda:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ -x_2 - 2x_3 = -7 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Ormai il sistema è risolto: dalla terza equazione si ha $x_3 = 3$, $x_2 = 1$ e $x_1 = 3$.

L'algoritmo di Gauss funziona anche quando il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite cioè quando $m \neq n$. Vediamolo nei prossimi esempi.

ESEMPIO 2.

Sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases}$$

in cui $m > n$. Aggiungendo alla seconda ed alla terza riga la prima moltiplicata per -2 si ha il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -5y = -5 \\ -4y = -4 \end{cases}$$

A questo punto è già chiaro che l'unica soluzione è $x = -2$ e $y = 1$. In ogni caso, proseguendo l'algoritmo si può aggiungere alla terza riga la seconda moltiplicata per $-\frac{4}{5}$ ottenendo:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -5y = -5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ultima uguaglianza è un'identità, a riprova del fatto che le equazioni sono ridondanti.

Nel caso in cui il sistema fosse impossibile procedendo con l'algoritmo si arriva ad una contraddizione.

ESEMPIO 3.

Sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Sempre aggiungendo alla seconda ed alla terza riga la prima moltiplicata per -2 si ha il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -5y = -5 \\ -4y = -2 \end{cases}$$

a questo punto, però, aggiungendo alla terza riga la seconda moltiplicata per $-\frac{4}{5}$ si ottiene:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -5y = -5 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Quindi una palese contraddizione: possiamo concludere dunque che il sistema dato non ammette soluzioni, o, come più comunemente ma meno propriamente si dice, è impossibile.

Un sistema lineare può anche avere infinite soluzioni:

ESEMPIO 4.

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$

Applicando l'algoritmo di Gauss (moltiplicando la prima riga per -1 e sommandola alla seconda) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 0=0 \end{cases}$$

equivalente a quello dato, da cui si vede che la seconda equazione è inutile, quindi la soluzione è data da tutte le infinite coppie di numeri che hanno come somma 4, che possiamo scrivere, ad esempio, come $x = t$ e $y = 4 - t$.

In particolare nei casi in cui il numero di equazioni è uguale al numero di incognite il metodo di Gauss viene applicato per ridurre la matrice dei coefficienti a una matrice triangolare.

Illustriamolo nel caso di un sistema di tre equazioni in tre incognite.

Dato il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

moltiplichiamo la prima equazione per a_{21} e la seconda equazione per a_{11} e sottraiamole tra loro. L'equazione che così si ottiene non ha più il termine in x_1. Analogamente moltiplichiamo la prima equazione per a_{31} e la terza per a_{11} e quindi sottraiamole: l'equazione che così si ottiene è anch'essa priva del termine in x_1.

Con queste due operazioni abbiamo trasformato il sistema in un altro equivalente nel quale la seconda e la terza equazione non contengono l'incognita x_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

A questo punto moltiplichiamo la seconda equazione per a'_{32} e la terza equazione per a'_{22} e sottraiamole: l'equazione che così si ottiene non ha più neanche l'incognita x_2: si tratta di un'equazione nella sola incognita x_3.

A questo punto il sistema si presenta nella forma detta a **matrice triangolare superiore**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

Dalla terza equazione, almeno se $a''_{33} \neq 0$ è possibile ricavare $x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$.

Se ne sostituisce il valore nella seconda e da essa, almeno se $a''_{22} \neq 0$, si ricava x_2.

Trovate x_2 e x_3, si sostituiranno nella prima equazione dalla quale, almeno se $a''_{11} \neq 0$, si ricava x_1.

Il metodo di Gauss consente quindi di formulare il seguente teorema:

Teorema. **Ogni sistema di *n* equazioni con *n* incognite, con matrice dei coefficienti a determinante diverso da 0, può essere trasformato in un sistema a matrice triangolare superiore.**

ESEMPIO 5.

Risolviamo il seguente sistema col metodo della triangolazione:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima riga per 3 e sottraiamola dalla seconda. Otteniamo $-11x_2 + x_3 = -12$.

Analogamente moltiplichiamo la prima equazione per 2 e sottraiamola dalla terza, e otteniamo

$$-7x_2 - 5x_3 = -2$$

Il sistema risulta così trasformato nel sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -11x_2 + x_3 = -12 \\ -7x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$

Moltiplichiamo ora la seconda equazione per 7 e la terza per 11 e sottraiamo membro a membro ottenendo:

$$62x_3 = -62$$

Quindi il sistema può riscriversi in forma triangolare superiore in questo modo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ \quad -11x_2 + x_3 = -12 \\ \qquad\qquad x_3 = -1 \end{cases}$$

Da cui risalendo e sostituendo via via a catena, si ottiene $x_2 = 1$ e $x_1 = 1$.

Provate ora a risolvere lo stesso sistema col metodo di Cramer. Quale ritenete sia il metodo più conveniente?